

Concours d'entrée en première année du premier cycle
Epreuve majeure : Mathématiques Coef 4 Durée : 3h. Session 2010

Exercice 1

- Soit $ABCD$ un carré de sens direct de centre O et d'arête $\sqrt{2}a$ avec $a > 0$. On considère une similitude qui transforme A en B et B en A .
 - On suppose que f est une similitude directe. Déterminer la nature exacte de f et la caractériser.
 - On suppose que f est une similitude indirecte. Déterminer la nature exacte de f et la caractériser.
- $ABCD$ est le carré ci-dessus, soit S le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OS} = \frac{\sqrt{3}}{2a}(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB})$.
 - Exprimer le milieu I de $[SD]$ comme barycentre des points A, B, C et S .
 - ACS est-il équilatéral ? Justifier.
 - Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BD}$ en fonction de a .
- On désigne par $S_{(ABC)}$ et $S_{(ACS)}$ les réflexions de plans respectifs (ABC) et (ACS) .
- Sans calculs, donner la nature de la composée $S_{(ABC)} \circ S_{(ACS)}$ et la caractériser.

Exercice 2

On considère dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $R = (O, I, J)$ l'ensemble (E) des points $M(x, y)$ tels que $x^4 - 16(y^2 - 2y)^2 = 0$.

- Montrer que (E) est la réunion d'une ellipse (E_1) et d'une hyperbole (E_2) dont on donnera les équations réduites respectives.
- Déterminer l'intersection de (E_1) et (E_2) .
- Déterminer les foyers de (E_1) par rapport au repère R .
- Déterminer l'excentricité et l'axe focal de (E_2) .
- La droite $(d) : \sqrt{3}x - 2y + 2 = 0$ est-elle tangente en au moins un point de (E) ? Si oui déterminer un tel point.
- Construire (E) par rapport au repère R (unité $1cm$).

Exercice 3

- Soit dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $(E) : z^3 + 4z^2 + (8 - 4i)z + 8 - 8i = 0$.
 - L'équation (E) admet-elle une solution imaginaire pure ? Justifier.
 - Résoudre l'équation (E) .
 - Ecrire les solutions de (E) sous la forme exponentielle.
- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) , on note par (L) l'ensemble des points M d'affixe z tel que $(z - |z|)^3$ soit un nombre complexe imaginaire pur. Déterminer et construire l'ensemble (L) .
- On désigne par j le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$. Exprimer sous forme algébrique et en fonction des valeurs de l'entier naturel n , $(1 + j)^n$.

Problème

On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \ln(1+x), \quad \text{et} \quad g(x) = x + \ln(1-x).$$

(C) et (C') désignent les courbes respectives de f et g par rapport à un repère orthonormé (O, I, J) du plan P (unité graphique 2cm).

Partie A

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2. En déduire le signe de $f(x)$.
3. Montrer que (C') est la symétrique de (C) par rapport à l'origine O .
4. En déduire que pour tout réel dans $]0, 1[$, on a $\ln(1+x) < x < -\ln(1-x)$.

Partie B

1. Déterminer l'ensemble (E) des points $M(a, b)$ tels que la tangente à (C) en a et la tangente à (C') en b soient parallèles.
2. Construire (E) , C et (C') .
3. On désigne par I l'aire du domaine plan délimité par (C) et (C') d'une part, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 0.8$.
 - (a) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur exacte de I .
 - (b) Donner une valeur approchée de I à 0.001 près.

Partie C

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{5n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\ln\left(5 + \frac{1}{n}\right) < u_n < \ln\left(5 + \frac{5}{n-1}\right)$.
2. La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier.
3. Peut-on déterminer un rang n_0 , entier naturel, à partir duquel u_n est une valeur approchée de $\ln 5$ à 0.001 près? Si oui, déterminer une valeur possible de n_0 en justifiant.